

Capítulo 7

DIAGONALIZAÇÃO (Matrizes Quadradas)

Definição:

Sejam A e B duas matrizes de ordem n . Dizemos que A é **semelhante** a B , se existe uma matriz invertível P , de ordem n , tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Observação:

Se A é semelhante a B , existe P invertível tal que $P^{-1}AP = B$. Mas então, $PBP^{-1} = A$ e podemos dizer que B é semelhante a A . Muitas vezes diz-se, simplesmente que A e B **são semelhantes**.

Exemplo:

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes, porque a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Teorema:

Sejam A e B duas matrizes de ordem n . A e B são semelhantes se, e só se, existem bases em relação às quais as matrizes representam a mesma aplicação linear.

Proposição:

Matrizes semelhantes têm

1. *o mesmo determinante.*
2. *o mesmo polinómio característico e portanto os mesmos valores próprios com as mesmas multiplicidades algébricas.*

Definição:

A diz-se **diagonalizável** se A é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existe uma matriz P invertível tal que

$$A = P^{-1}DP,$$

com D uma matriz diagonal.

Matriz diagonalizante

$$PAP^{-1} = D$$

Proposição:

Se A é uma matriz diagonalizável e P é uma sua matriz diagonalizante, isto é,

$$P^{-1}DP = A,$$

com

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix},$$

então

1. *cada d_i , $i = \{1, \dots, n\}$, é um valor próprio de A .*
2. *a matriz P^{-1} tem como suas colunas, n vectores próprios de A , linearmente independentes, cada um deles associado, respectivamente, a $d_1, \dots, d_n$.*

Dem:

Temos $P^{-1}DP = A$, ou seja, $AP^{-1} = P^{-1}D$.

Seja C_1 a primeira coluna de P^{-1} (não nula pois P^{-1} é invertível).

Como a primeira coluna de $P^{-1}D$ é $d_1 C_1$, então,

$$AC_1 = d_1 C_1,$$

ou seja, C_1 é um vector próprio de A associado ao valor próprio d_1 .
O mesmo acontece com as outras colunas de P^{-1} .

Definição:

Seja A uma matriz de ordem n e α um valor próprio de A , chamamos **multiplicidade geométrica** de α ,  $mg(\alpha)$ à dimensão do subespaço próprio associado ao valor próprio α , isto é,

$$mg(\alpha) = \dim M_\alpha.$$

Proposição:

Sejam A uma matriz de ordem n e α um valor próprio de A . Então,

$$1 \leq mg(\alpha) \leq ma(\alpha).$$

Proposição:

Se $v_1, \dots, v_k$ são vectores próprios de A associados aos valores próprios distintos $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, então o conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente.

Teorema:

Seja A uma matriz de ordem n . A é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de A é n .

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ é diagonalizável ?}$$

Qual a matriz diagonalizante ?

1. Calculemos os valores próprios de A:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \\ &= \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 2(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Então 2 e 1 são os valores próprios de A e

$$ma(2) = 2, \quad ma(1) = 1.$$

2. Determinem-se os subespaços próprios de A. M_2 M_1

$$\bullet M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2I_3 - A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$$2I_3 - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow (l_2 + \frac{1}{2}l_1) \\ l_3 \rightarrow (l_3 + \frac{1}{2}l_1)}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z\} = \langle (-1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle.$$

Ora,

$\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é linearmente independente, pois

$$r \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2,$$

logo $mg(2) = 2$ e $\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é uma base de M_2 .

$$\bullet M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (I_3 - A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$$I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \rightarrow (l_2 + l_1) \\ l_3 \rightarrow (l_3 + l_1)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2z, \quad y = z\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle.$$

Como $(-2, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$ então é linearmente independente,

logo $mg(1) = 1$ e $\{(-2, 1, 1)\}$ é uma base de M_1 .

Resposta: Como $mg(2) + mg(1) = 3 = \text{ordem } A$
então A é
diagonalizável.

3. Finalmente determine-se a matriz diagonalizante de A

$P = ?$ tal que $A = P^{-1}DP$

Ora,

$$M_2 = \langle (-1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$$

$$M_1 = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(matriz formada pelos
vectores das bases de M_2 e M_1)

cuja inversa é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonalizante de A

$D = ?$

$$D = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observação:

Se tivéssemos escolhido

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ então } D = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Classificação de Cónicas de $\mathbb{R}^2$

Definição:

Chama-se **forma quadrática** de $\mathbb{R}^2$ a toda a aplicação do tipo

$$Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & Ax^2 + Bxy + Cy^2. \end{array}$$

Dizemos que Q é uma **forma quadrática diagonal** se

$$Q(x, y) = Ax^2 + Cy^2.$$

Observação:

$Q(x, y)$ pode ser escrita na forma matricial da seguinte forma

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

**Matriz associada
à forma quadrática Q**
(Matriz simétrica)

Exemplo:

A matriz associada à forma quadrática

$$Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + 3xy - y^2 \end{array} \quad \text{é}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Como se diagonaliza uma forma quadrática

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \quad ?$$

Heverá uma base para a qual a forma quadrática admite uma matriz associada diagonal?

1. Construir a matriz associada à Forma Quadrática

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.$$

2. Calcular os valores próprios de M

$$\begin{aligned} p_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - A & -\frac{B}{2} \\ -\frac{B}{2} & \lambda - C \end{vmatrix} = (\lambda - A)(\lambda - C) - \frac{B^2}{4} = \\ &= \lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - \frac{B^2}{4}). \end{aligned}$$

Então, $p_M(\lambda) = 0$ se

$$\lambda = \frac{A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4AC + B^2}}{2} = \frac{A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2}.$$

1º Caso $(A - C)^2 + B^2 = 0$, ou seja $A = C$, $B = 0$.

Neste caso M já é diagonal e não há nada a fazer

2º Caso $(A - C)^2 + B^2 > 0$,

Neste caso M tem dois valores próprios distintos λ_1 e λ_2 ,

$\Downarrow$

$$ma(\lambda_1) = 1, \quad ma(\lambda_2) = 1$$

$\Downarrow$

$$mg(\lambda_1) = 1, \quad mg(\lambda_2) = 1$$

$$\Downarrow \quad mg(\lambda_1) + mg(\lambda_2) = 2 = n$$

M é diagonalizável

(i) Calcular uma base para cada subespaço próprio

$$M_{\lambda_1} = \langle (x_1, y_1) \rangle, \quad M_{\lambda_2} = \langle (x_2, y_2) \rangle$$

Normalizam-se as bases

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}, \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right)$$

$$= (x'_1, y'_1)$$

$$\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right)$$

$$= (x'_2, y'_2)$$

(ii) Construir a matriz dos vectores próprios (vai originar a matriz diagonalizante)

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}$$

Invertendo esta matriz

$\Downarrow$

S Matriz diagonalizante de M

Observação:

1 Prova-se que $S = (S^{-1})^T$

2 $S^{-1} D S = M$ ou equivalentemente

$$S M S^{-1} = D$$

$$\text{com } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Olhando para M como uma matriz da forma $M(f; b.c., b.c.)$ então

$$S M S^{-1} = M(id_{\mathbb{R}^2}; b.c., \mathcal{B}) \quad M(f; b.c., b.c.) \quad M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, b.c.),$$

Matriz da forma quadrática
 $D = Q$ em relação à base
 $\mathcal{B} = \{(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2)\}$

(iii) Apresentar a Forma Quadrática Diagonal de Q

$$Q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

(forma quadrática na base $\mathcal{B}$).

Exemplo:

Pretende-se diagonalizar a forma quadrática

$$Q(x, y) = 2xy.$$

Não diagonal

1. A matriz associada a Q é

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Os valores próprios de M são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Então a forma quadrática diagonal de Q é

$$\bullet Q(x', y') = (x')^2 - (y')^2$$

cuja matriz associada é

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

• A base na qual a forma quadrática Q admite a forma * é:

Determinam-se os subespaços próprios,

$$M_1 = \langle (1, 1) \rangle, \quad M_{-1} = \langle (-1, 1) \rangle$$

e após normalizados originam

$$(x'_1, y'_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (x'_2, y'_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Logo

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$